CONFÉRENCE ÉTAMPES

Deux
Universels
dans la
Décoration

Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs, permettez-moi tout d'abord de vous remercier pour m'avoir invité à faire un exposé dans cette belle ville historique d'Étampes, en ce lieu qui porte le nom d'un savant que j'admire beaucoup, et que nous rencontrerons au cours de l'exposé. Je suggère de faire ensemble quelques premiers pas dans la description d'une sorte de fresque historique relatant les rapports entre les mathématiques et les arts.

Les Mathématiques et les Arts. S'il fallait désigner un terme qui les caractérise tous deux, qui les rassemble, qui les unit, je choisirais immédiatement celui de Beauté.

Voici ce qu'en dit Aristote, un des savants les plus célèbres du 4-ième siècle avant J.C.:

Les formes les plus frappantes du beau, dit Aristote, *sont l'ordre, la symétrie, la précision.*
Aristote ajoute : *et ce sont les sciences mathématiques qui s'en occupent éminemment.*

(*Métaphysique, Livre M, Chap. IV).*

Je dirai pour ma part qu'un objet est doté de Beauté lorsque ses caractéristiques, notamment structurales, éveillent le sourire de l'intelligence, apportent détente de l'esprit et bienfait au corps.

L'incarnation des mathématiques dans l'art n'a cessé d'être présente depuis l'aube de l'humanité. Dans l'antiquité, on citera la construction des pyramides et des temples, la réalisation des frises et de multiples pavages, des mosaïques. Chacun a entendu parler du nombre d'or qui a fasciné tant d'artistes, le sculpteur grec Phidias sans doute, Michel-Ange et Léonard de Vinci certainement, récemment l'architecte Le Corbusier, pour ne citer que des noms célèbres. Les quinzième et seizième siècles ont connu un âge d'or, avec l'introduction par les artistes de la théorie mathématique de la descriptive, son usage en peinture, la redécouverte des polyèdres et leur inscription dans les œuvres de cette époque. Qui ne connaît pas les noms de Piero della Francesca ou de Dürer. Un nouvel âge d'or se développe au vingtième siècle et s'étoffe avec vigueur aujourd'hui. Cubistes, constructivistes font encore appel à des formes mathématiques simples, mais déjà les sculpteurs Pevsner et Gabo créent des surfaces réglées plus élaborées, Dali fait venir chez lui des mathématiciens, et Escher plonge ses œuvres parmi les plus célèbres dans la géométrie hyperbolique. En matière d'architecture, les mathématiques ont donné leurs formes au Palais du CNIT à La Défense, aux réalisations admirables des opéras de Sydney en Australie et de Valencia en Espagne. On assiste aujourd'hui à une création foisonnante d'œuvres inspirées par les mathématiques, dont l'univers est peuplé d'une infinité d'objets plus surprenants les uns que les autres. Ils sont si nombreux, si divers dans leurs propriétés que les mathématiciens sont loin de les connaître tous. Tout comme le grand public, ils ont plaisir à les découvrir dans leur éclat grâce au travail des artistes qui, par la justesse et la pureté de leurs dessins, leurs jeux des couleurs, nous font découvrir leurs beautés cachées.

Ces quelques mots d'introduction laissent entrevoir l'immensité du sujet à traiter, les rapports entre les mathématiques et l'art. Plutôt que de trop rester dans les généralités de la fresque, je me propose d'examiner plus en détail deux points : dans le premier, j'évoquerai quelques dénominateurs communs aux arts et aux mathématiques, dans le second, je montrerai la profondeur et l'étendue des potentialités artistiques et mathématiques contenues dans deux gravures exécutées il y a ... 18000 ans.

PREMIÈRE PARTIE

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES RAPPORTS ENTRE MATHÉMATIQUES ET ARTS
ou quelques dénominateurs communs aux arts et aux mathématiques

Comme entrée en matière, en préliminaire, quelques mots d'abord sur les raisons pour lesquelles les activités mathématiques et artistiques sont si profondément liées. Je retiendrai six points communs : 1) l'activité de représentation de l'espace, 2) le rôle de la lumière, 3) le souci de perfection, 4) l'inventivité et la fécondité, 5) la singularité (ou originalité), versus 6) l'universalité (stabilité spatio-temporelle).

Notre point de départ sera la transposition, dans un langage plus moderne et dans une perspective plus générale, de cette simple remarque de Platon :

«la nature mortelle cherche, dans la mesure où elle le peut, à se donner perpétuité, immortalité » (Le Banquet, 207 D)

C'est en effet un fait très général que tout objet, tout objet dis-je, s'efforce d'être placé et de se placer dans les conditions qui lui assurent la meilleure permanence à travers l'espace et à travers le temps, la plus grande **stabilité** spatio-temporelle.

Pour assurer la stabilité de leur personne, les êtres vivants ont besoin de connaître leur environnement, pour y puiser les formes d'énergie nécessaires à leur maintien, et pour se préserver de tous les dangers qu'ils peuvent rencontrer. Ils ont façonné et développé pour cela des mécanismes et des outils de détection et de **représentation** de cet environnement, de l'espace dans lequel nous sommes plongés.

1) Représentation de l'espace et ce qu'il contient

Tant l'artiste que le mathématicien participent à ce travail de représentation de l'espace et des objets qui y figurent, des phénomènes qui s'y produisent.

Comme l'a brillamment fait ressortir Platon dans son exposé du mythe de la Caverne, ce que représentent les uns et les autres ne sont que des **apparences**, des **ombres**. Que savez-vous de la chose que vous regardez, de toutes les faces de son extérieur, de la prodigieuse organisation fonctionnelle de son intérieur ?

Ces objets, ces phénomènes concernent en premier lieu le monde physique, sur lequel s'est construit ensuite le monde biologique, sur lesquels se sont construits à leur tour les mondes psychologique, intellectuel, symbolique.

Tous ces mondes sont figurés, avec plus ou moins de présence, d'intensité, de subtilité, de profondeur, dans les œuvres si nombreuses et si diverses des artistes, qu'ils soient peintres, sculpteurs, architectes ou musiciens, dans les représentations symboliques des mathématiciens.

Les uns et les autres s'occupent des formes, c'est-à-dire de géométrie et de topologie, également des quantités et dimensions associées à l'énergie constitutive des objets, ce qui nous renvoie à la théorie des nombres.

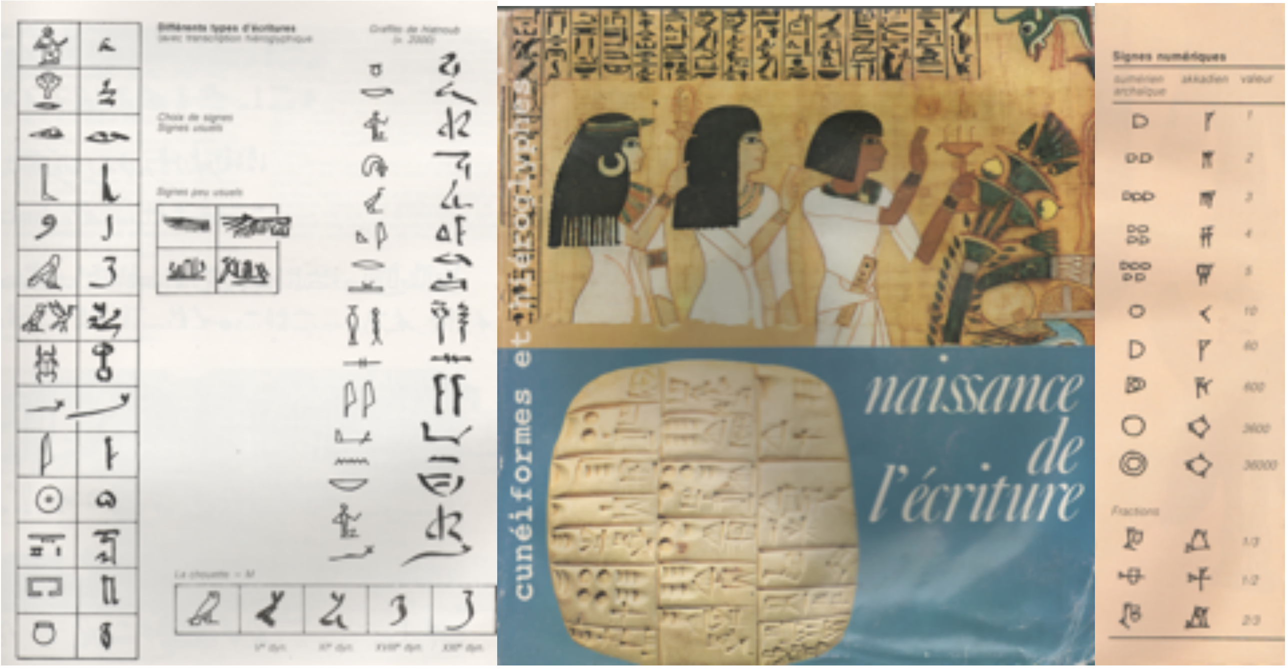
La mathématique apparaît ainsi comme une sorte de miroir plein de propriétés dans lequel se reflète pour le moins la réalité physique du monde.

C'est une construction à étages. Elle provient, dans ses fondements, de la représentation dans un langage quelque peu symbolique d'objets et de phénomènes du monde physique, souvent liés entre eux par des relations de causalité. Ces représentations sont étudiées par elles-mêmes, le déroulement des causalités permettant la monstration de faits parfois peu apparents. Des expériences de pensée conduisent à poser de nouveaux problèmes, à fabriquer de nouvelles représentations, à découvrir le caractère général de certaines méthodes, de certaines propriétés.

À un second étage, on étudie le mode de génération et la structure de ces représentations premières ; c'est la part qui paraît la plus abstraite des mathématiques, mais aussi la plus universelle.

Par voie de retour, ces études permettent d'enrichir la connaissance de faits locaux, d'apporter la preuve causale de leur existence.

Dans le cas artistique comme dans l'autre mathématique, comme vont le montrer ces premières images consacrées à l'écriture, l'outil premier de la représentation matérielle est le dessin, plus ou moins élémentaire, rapidement déformé, transformé, et devenu symbole.



Extraits de l'ouvrage «naissance de l'écriture», Ministère de la Culture, 1982

Je laisserai à un artiste renommé le soin de clore cette petite section consacrée à la représentation de l'espace, son propos original révèle à quel point il avait conscience de la nature de son activité :

« mon lecteur attentif sait, aussi bien que moi, que tout ce qu'il y a de réellement superfin et sensationnel à notre époque provient spécialement de l'évolution de l'idée de l'espace, laquelle, comme tout le monde peut se le rappeler, ayant commencé par n'être qu'une espèce de nourriture abstraite, sans goût ni substance, a fini – comme nous allons le voir immédiatement – par devenir, de nos jours, un des plats les plus succulents et épais de la pensée contemporaine.

L'espace, pour Euclide, d'après qui l'intersection, le point, le plan n'étaient pas autre chose que des objets matérialisés, l'espace, dis-je, n'arrivait pas pour lui à atteindre une consistance supérieure à celle d'un léger bouillon de tapioca parfaitement utopique et refroidi.

C'est avec Descartes que, par la considération de l'espace comme un contenu à trois dimensions, commence à épaissir le jus insipide et encore, et surtout, à ouvrir l'appétit aux expectation salivaires qui provoquent déjà cette extravagante cuisine de l'espace ; laquelle trouve définitivement tout son poids avec la pomme de Newton qui, comme on le sait, était un savant ayant, déjà, indiscutablement, une inertie et une famine considérables. » (S. Dali)

2) <u>Rôle de la lumière</u>

La lumière est la première des sources d'énergie. Par son importance, l'étude du phénomène lumineux est l'un des plus grands objectifs de la physique.

C'est principalement par la présence de la lumière que s'accomplit la détection des objets, la reconnaissance des formes, leur première caractérisation. Le rôle de la lumière est un autre de ces dénominateurs communs entre mathématiques et arts.

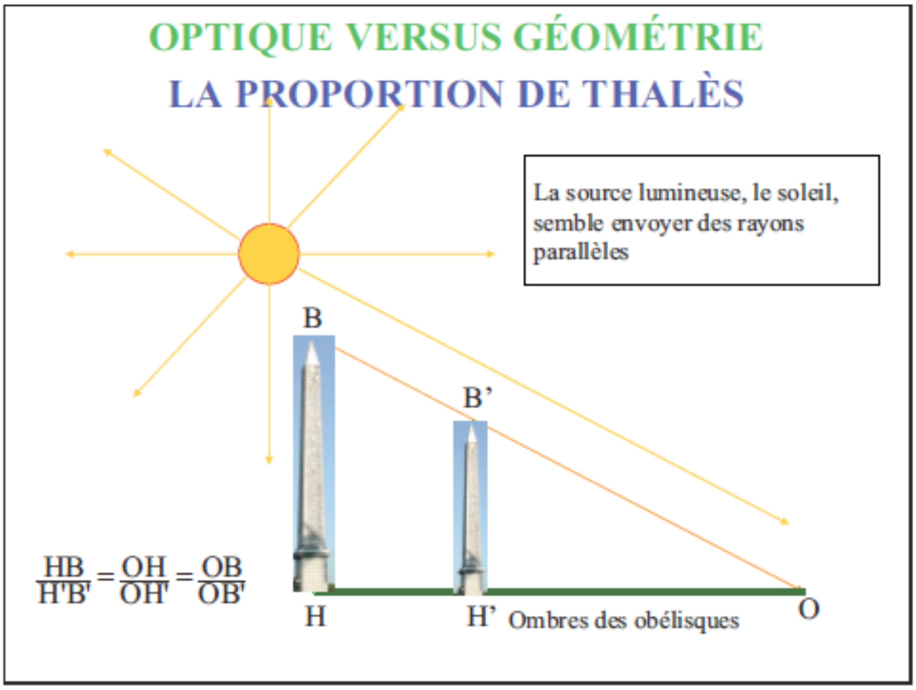
Empruntons ici au poète quelques vers évoquant l'arrière-plan lumineux fondateur et commun aux activités géométriques et artistiques :

Ne dis plus rien
Ne pense à rien
Les lumières bleutées des reverbères
Qui sculptaient nos ombres sur la terre
...

Notons que dans le domaine de la lumière, le peintre va plus loin que le mathématicien, en ce sens qu'il ajoute la couleur à la forme pour rendre l'objet plus présent, parfois plus significatif. Mais, dans ce même domaine, le mathématicien va également plus loin que l'artiste, car son étude de la forme est plus précise, plus complète, et finalement le conduit à enrichir de manière considérable la panoplie des formes.

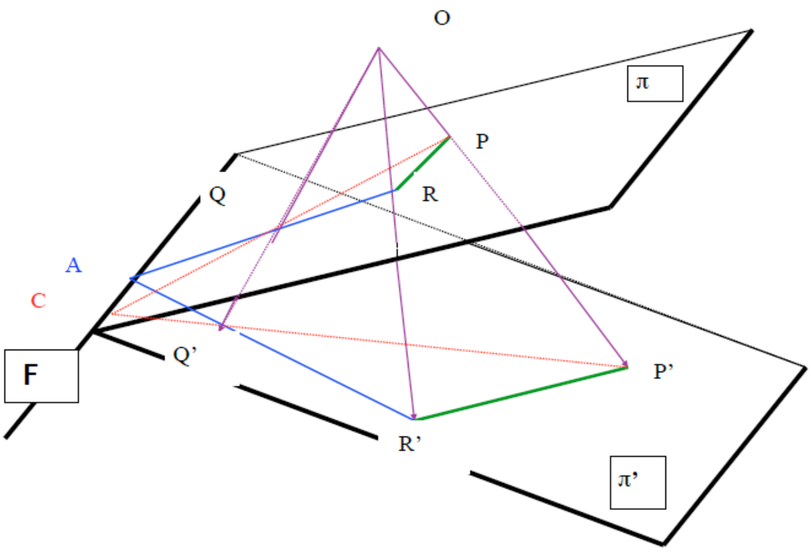
La lumière donne naissance aux ombres, et par voie de conséquence à la géométrie classique : celle-ci est avant tout l'étude des ombres sur des écrans des objets éclairés par des faisceaux lumineux.

Le théorème attribué à Thalès (636-546) est l'énoncé fondateur de la géométrie. C'est en fait une observation de base de l'optique géométrique, du monde physique le plus accessible à nous.



La toile du peintre est également cet écran sur lequel se projettent, portés par les rayons de lumière, ses visions du monde, comme nous le rappellent par exemple ces deux gravures classiques (1525) d'Albrecht Dürer (1471-1528) - il est l'un des promoteurs de la perspective, présente spontanément chez les grands artistes, comme on s'en aperçoit en regardant les peintures de la fameuse Grotte Chauvet.

De l'exposé sur la perspective
http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/INITIATIONALAPERSPECTIVE.pdf
j'extrairai l'image suivante :



Le point O figure la position de l'oeil du peintre. Il observe le triangle P'Q'R' qu'il représente par le triangle PQR sur son écran.

Pour lui, ces deux triangles sont *homologues*. O est appelé le centre de l'homologie, et la droite F, située à l'intersection du plan observé et du plan de son écran, invariante, est appelée l*'axe de l'homologie*.

Ce terme et cette notion d'homologie apparaissent, pour la première fois peut-être (?) dans un traité de géométrie de Chasles en 1837, alors que déjà, depuis plusieurs années, l'évolutionniste Geoffroy St-Hilaire, en opposition à Cuvier, employait le même concept sans toutefois utiliser le terme. On peut penser que les vifs débats, opposant les transformationnistes comme Lamarck et St-Hilaire au fixiste Cuvier, ont eu un écho positif auprès des autres disciplines scientifiques.

Liée à la perpsective est la notion de géométrie projective, introduite par l'architecte et mathématicien Girard Desargues (1591-1661). Les Anciens imaginaient que, de l'oeil, partaient des rayons de vision fictifs. Tout point situé sur l'un de ces rayons a une seule image dans l'oeil. La section de l'ensemble de ces rayons est un plan de vision appelé le plan projectif. Les écrans d'ordinateurs sont de tels espaces, sur lesquels les géomètres d'aujourd'hui et les programmeurs font leurs représentations.

De nos jours encore, la perspective a inspiré le monde artistique à travers l'oeuvre du peintre américain Dick Termès. Imaginez qu'il se place au centre d'un cube transparent. Il voit ce qui est en dessous, et peint le tableau de ce qu'il voit sur cette face inférieure. Il voit ce qui est au-dessus de sa tête, devant, derrière lui, sur ses côtés à droite et à gauche, et sur chacune des faces correspondantes du cube peint ce qu'il voit. Il gonfle le cube et obtient une sphère peinte qu'il appelle une termespshère bien sûr. En voici une,

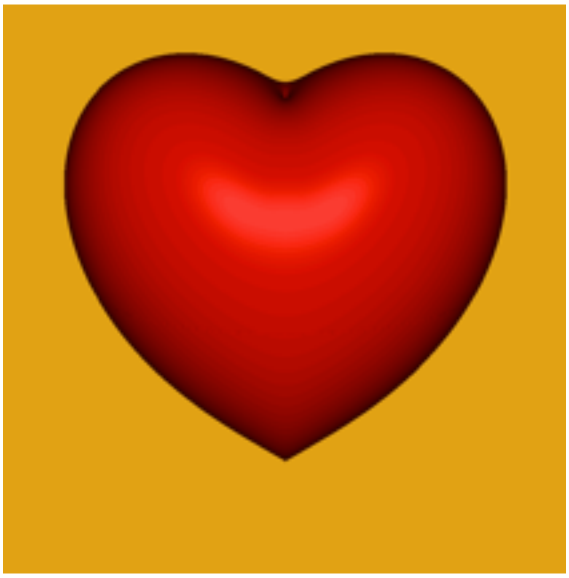
Dick Termes : La Sainte Chapelle

on en trouvera bien d’autres sur le site http://termespheres.com/about-dick-termes/.

3) Le souci de la perfection

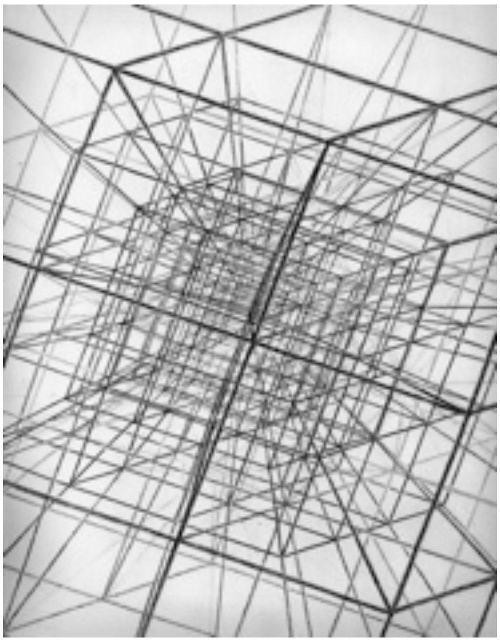
Par ailleurs, mathématicien et artiste n’ont-ils pas en commun le souci de finition dans l’exécution ? L’exactitude, la précision, la perfection dans la réalisation sont souvent l’apanage de l’artisan digne de ce nom, de l’artiste.

Immortality (nœud de trèfle)
John Robinson (sculpteur1935-2007)



$(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - 1/10\, x^2z^3 - y^2z^3 = 0$
(**Tore Norstrand** & **Bruce Hunt**)

Comment alors celui-ci ne serait-il pas séduit par la pureté de la ligne tracée par le mathématicien, la rigueur de sa description et du dessin qui en résulte ? Doit-on s'étonner de l'attraction exercée par le monde des objets mathématiques sur nombre de graveurs depuis Dürer jusqu'à Jeener en passant par Flocon ? Et N'oublions pas les magnifiques gravures sur pierre exécutées par les Egyptiens pendant plusieurs millénaires.



Pavage d'hypercubes, **Patrice Jeener**

Est-il besoin d'insister sur le caractère précis de l'énoncé du mathématicien, sur la sûreté et la perfection recherchées dans la présentation et l'explication des faits, ce qu'on appelle la démonstration ?

4) L'inventivité, la fécondité

Quel que soit le domaine d'activité considéré, le grand homme est celui qui laisse derrière lui une œuvre abondante. C'est le cas des grands artistes, des grands mathématiciens.

Chez les artistes, pensons par exemple à Michel-Ange le peintre de l'immense chapelle Sixtine, à Léonard de Vinci, cet homme onmniscient, ou, plus près de nous, à Picasso qui nous a laissé près de 1200 oeuvres.

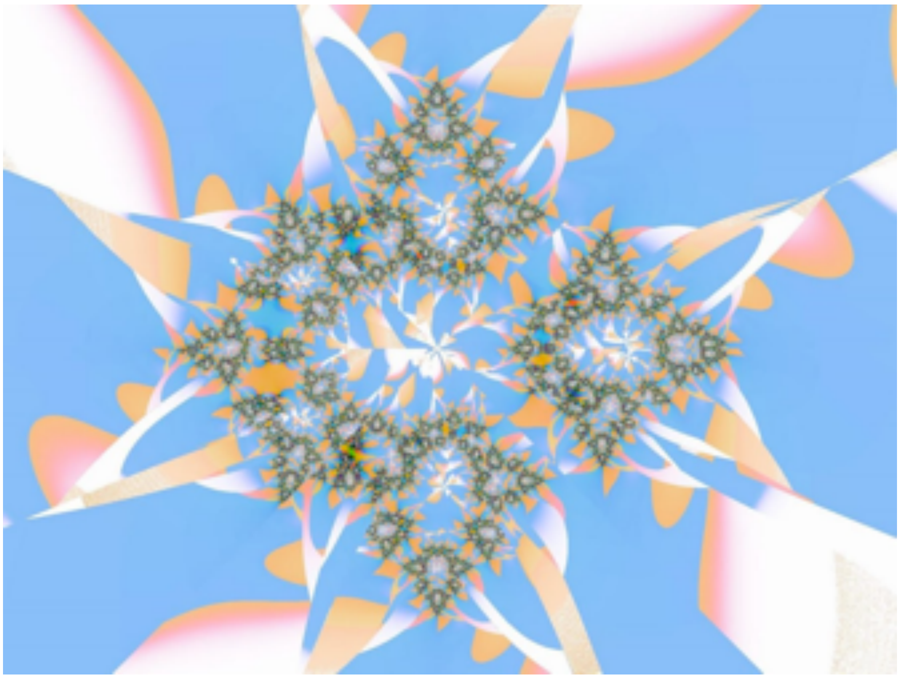
Chez les mathématiciens, sait-on par exemple que l'on n'a pas fini de publier les écrits du grand Euler (1707-1783), cet empereur des mathématiques : 80 volumes de ses œuvres ont déjà paru, mais on n'en a pas encore fini avec sa correspondance qui devrait occuper plusieurs volumes supplémentaires.

L'œuvre d'art est souvent cette alliance réussie entre la singularité de la forme, la pureté de ses lignes et l'infini nuancier de la lumière incarnée dans la matière. Cette alliance peut séduire tant l'artiste que le mathématicien. Si l'un comme l'autre peuvent s'attacher à ne révéler, dans sa pureté fascinante, qu'une seule forme mathématique, la fécondité de leur imagination peut également les conduire à créer des œuvres originales peuplées d'objets variés révélant la chaleureuse richesse de l'univers des formes.

Anatole Fomenko

Anti-Dürer

Le retournement de la sphère



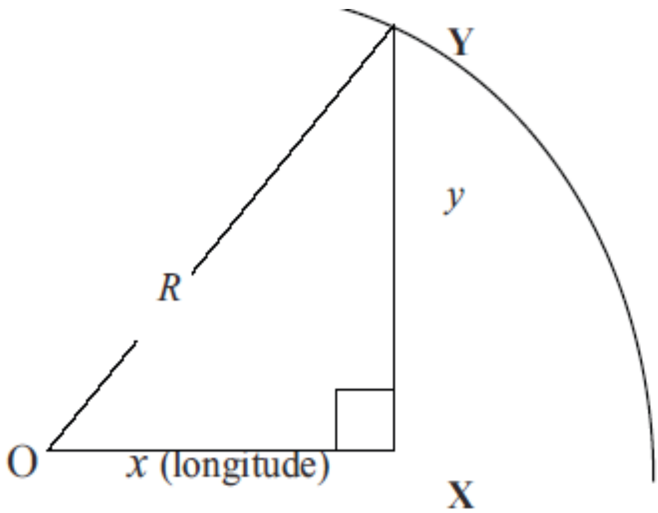
Mikael Mayer :oo(((0.3+1.28i)*(argch(arcsin(exp(x)))*x/exp((3.16-2.44i)+y))+argsh(z^4-z^(z) *argch(z^-4))/2,6)*0.5j

L'artiste traduit, par l'infinie variété du contenu de ses oeuvres, la richesse créatrice de la Nature. Cette toile qui nous rappelle la forêt vierge, symbolise ici sa fécondité et l'originalité de ses créations.

Le lion ayant faim (**Douanier Rousseau**, 1905)

Mais les mathématiques n'ont-elles pas ce même pouvoir, grâce à l'infini inventivité du nombre ?

La métaphore suivante le fait voir aussitôt. Chacun connaît aujourd'hui l'énoncé du théorème de Pythagore :



si x désigne la longueur du côté OX du triangle OXY, rectangle en son sommet X, y la longueur du côté XY, et R la longueur de l'hypoténuse OY, alors le carré de la longueur de cette hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Lorsque x et y varient de sorte la relation $x^2 + y^2 = R^2$ reste toujours vérifiée, le point Y décrit un cercle de centre O de rayon R.

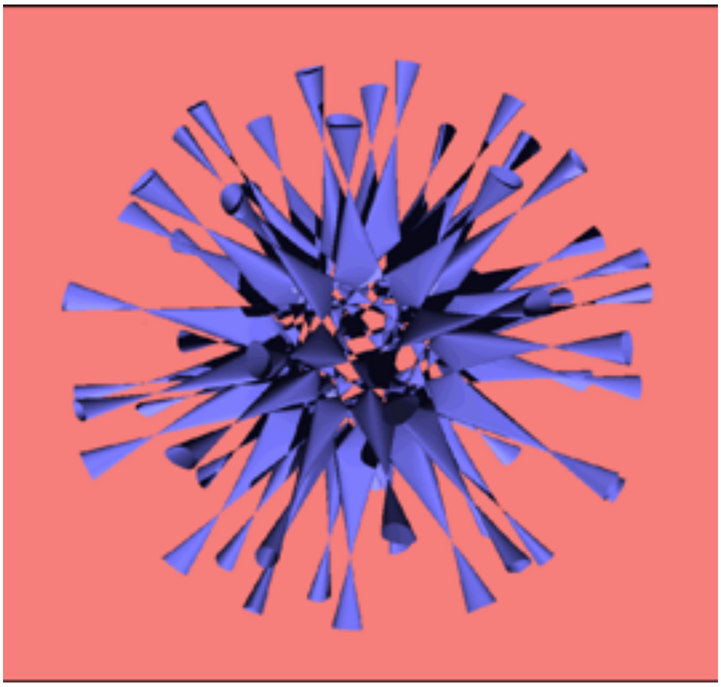
Maintenant, remplaçons le 2 qui montre le carré de x par un nombre quelconque n, le 2 qui montre le carré de y par un nombre quelconque m, le coefficient 1 qui affecte x^2 par un entier positif ou négatif quelconque p, le coefficient 1 qui affecte y^2 par un entier positif ou négatif quelconque q, de sorte qu'on obtient l'expression

$$p\,x^n + qy^m = R^2$$

Cette expression toute simple définit une infinité de formes possibles puisque chacun des nombres p, q, n et m peut varier à l'infini.

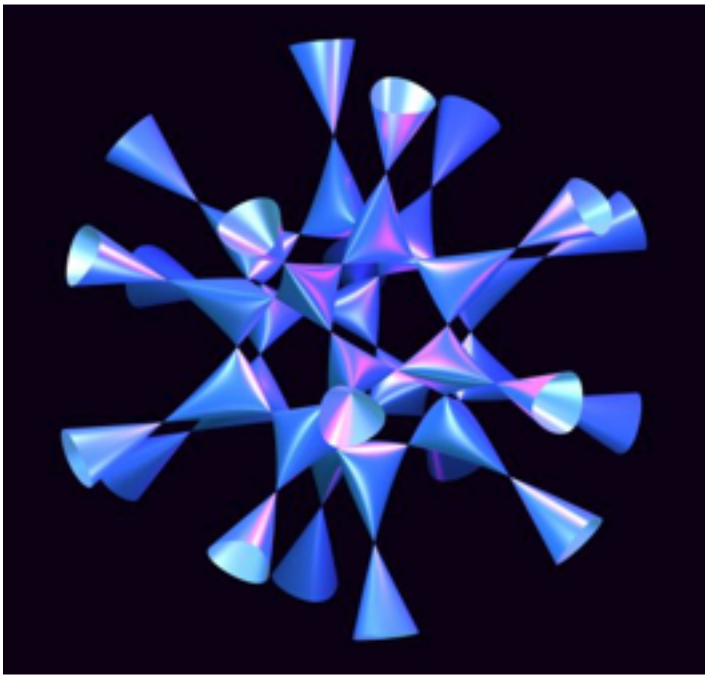
Shakespeare me pardonnera peut-être d'adapter à notre modernité sa célèbre remarque :

« *Il y a plus de choses sur la terre et dans les mathématiques, Horatio, qu'il n'en est rêvé dans votre philosophie* ».



$T_8(x) + T_8(y) + T_8(z) = 0$ avec $T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$.

Une surface de Chmutov (réalisée par **Bruce Hunt**) de degré 10 avec 345 points singuliers



http://www.imaginary2008.de/galerie_view.php?gal=1
Sextique de Barth déployée à 65 Singularités
$4(\Phi^2x^2-y^2)(\Phi^2y^2-z^2)(\Phi^2z^2-x^2)-(1+2\Phi)(x^2+y^2+z^2-w^2)^2\, w^2 == 0$
Φ est le nombre d'or, w un paramètre ici égal à 1

Ainsi, à l'extrême diversité des œuvres artistiques, répond la richesse morphologique infinie de l'univers mathématique.

5) La singularité, l'originalité

Souvent l'artiste, par la puissance de son imagination, nous met au contact de spectacles inattendus, insolites parfois, exaltant et déployant les possibilités du monde actuel.

S.Dali, Cygnes réfléchis en éléphants, 1937.

C’est en effet un autre point commun entre objets mathématiques et œuvres artistiques que leur caractère surprenant, inattendu, qui éveille la curiosité, attire le regard, et parfois fascine : l’œil, la pensée sont séduits par l’originalité singulière et sans cesse renouvelée.

Chaque oeuvre artistique est unique, singulière. Certes, on rencontre fréquement, selon les moeurs des temps, des motifs d’inspirations similaires, des analogies de contenus, de constructions, des homologies entre formes, mais le clone parfait n’existe pas. Ce caractère singulier des oeuvres artistiques est aussi celui des oeuvres mathématiques.

Énoncés de propositions, théorèmes sont tous différents, uniques dans leur particularité. On ne saurait confondre le théorème de Pythagore avec celui de Thalès. Et ces énoncés sont tous inattendus, surprenants.

Comment ne pas s’étonner que les bissectrices d’un triangle quelconque soient toujours concourantes. Et même cet énoncé est vrai également pour les hauteurs ou les médiatrices du triangle ! Qui l’eut cru, qui l’eut dit, a priori ? Ce sont là choses étonnantes et merveilleuses.

La singularité de l’oeuvre, du fait, outre qu’elle frappe l’esprit, est aussi un fait général.

6) <u>L’universalité, ou : la stabilité spatio-temporelle</u>

Les visiteurs aujourd’hui se pressent devant les peintures rupestres de la Grotte Chauvet : elles ont 36 000 ans d’âge. Elles n’ont pas vieilli.

D’autres touristes ne cessent de contempler, selon le terme qu’emploie Victor Hugo, ces extraordinaires et antiques pyramides qui se dressent le long du Nil, et ces trésors qu’elles maintenaient dans le secret de leurs dieux :

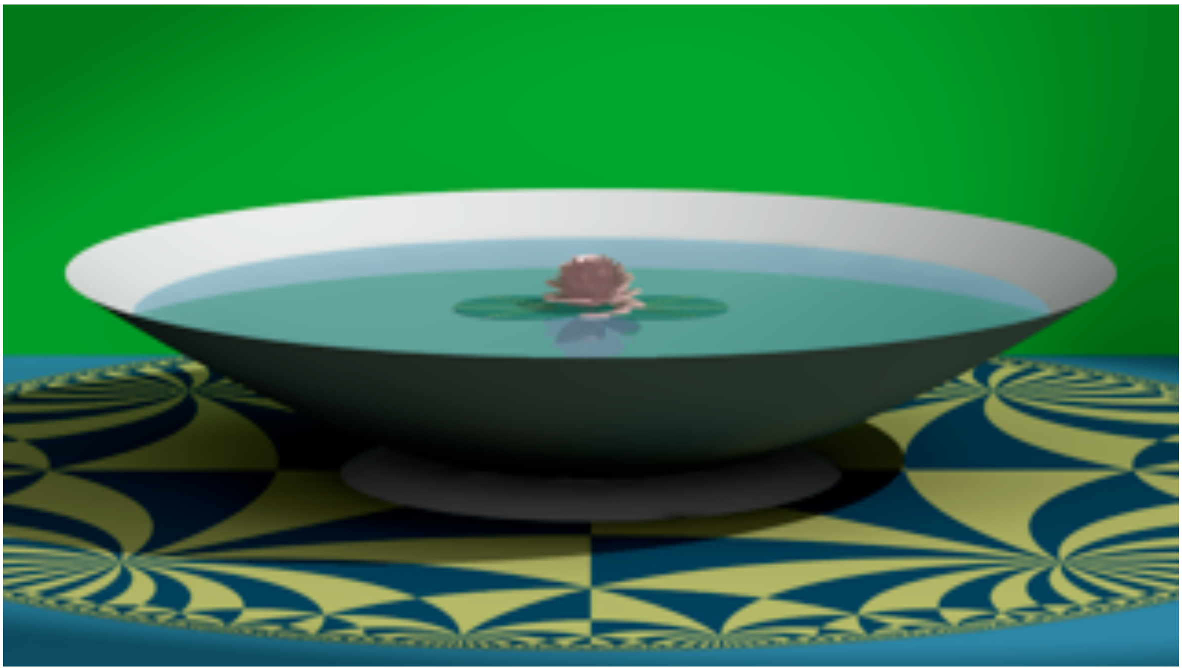
L’Offrande de Ramsès au dieu Ptah-Sokar-Osiris et à la déesse Isis

Les salles exposant la Joconde ou les peintres impressionnistes, à Paris, New-York ou Tokyo, ne désemplissent pas. On pourra déplacer la Joconde sur la Lune, l'étonnement et l'adhésion seront les mêmes.

Les grandes oeuvres artistiques ont un caractère impérissable à travers l'espace et à travers le temps. Caractère relatif, bien sûr.

Mais pour ce qui est des oeuvres mathématiques, le caractère relatif disparaît. Il devient absolu. Sur la Lune ou sur Mars, aujourd'hui ou dans mille ans, le théorème local de Pythagore relatif à un triangle rectangle plan ne changera aucunement de nature, d'expression, de véracité. Il est éternellement vai.

Aussi, c'est par une offrande à l'universel que sera conclue la première partie de cet exposé :



Vase hyperbolique posé sur un napperon hyperbolique (**Bruter-Leys**)