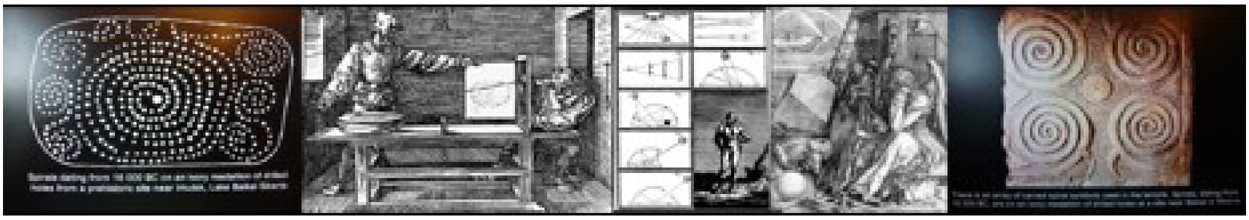
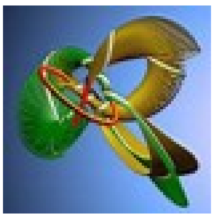
European Society for Mathematics and the Arts



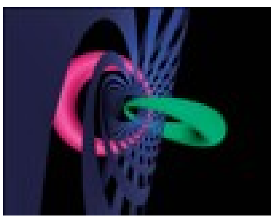
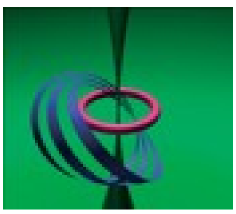
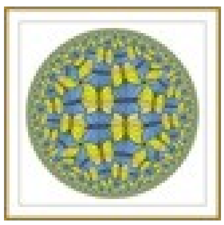
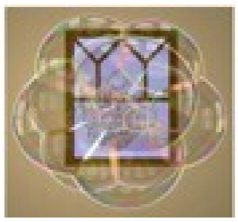
HOMMAGE À POINCARÉ

Sous les noms respectifs de *Topologie* et de *Systèmes Dynamiques*, Henri Poincaré a principalement étudié les propriétés caractéristiques des Domaines spatiaux et des Mouvements qui peuvent être accomplis sur et à l'intérieur de ces domaines.

Sont dédiées aux Systèmes Dynamiques, trois oeuvres de Jean-François Colonna, deux oeuvres de Jos Leys.

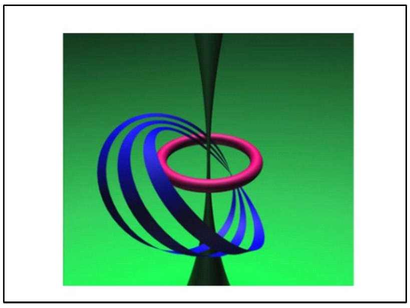
Sont dédiées à la Topologie, deux oeuvres de Tom Banchoff, une oeuvre d'Anatoly Fomenko, une oeuvre de Jos Leys, une oeuvre de John Sullivan

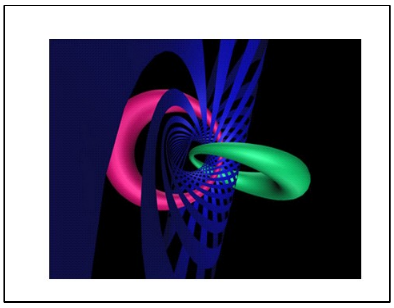
    

ESMA - Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie. 75231 PARIS Cedex 05. FRANCE
www.math-art.eu

TOM BANCHOFF
http://www.math.brown.edu/TFBCON2003/art/welcome.html

C'est à l'époque de Poincaré que débute l'exploration des propriétés de *l'espace à 4 dimensions* et des objets qu'il contient. Parmi eux, la *sphère* notée *S3* des points de cet espace situés à distance unité de l'origine.
On sait aujourd'hui construire les sphères de différentes façons. L'une d'elles fait appel à des tores, analogues aux chambres à air et autre bouées de sauvetage lorsqu'on est en dimension 2 : un tel tore est une sorte de cercle qui a pris du volume, il généralise en quelque sorte le cercle sans épaisseur.
On peut construire la sphère ordinaire en considérant d'abord son équateur et un grand cercle passant par les deux pôles. En faisant tourner l'un de ces deux cercles de sorte qu'il conserve ses contacts avec l'autre, on obtient la sphère.
C'est par un processus de ce genre que l'on peut obtenir la sphère de l'espace à 4 dimensions où les deux cercles précédents sont remplacés par deux tores pleins dont on identifie les bords.
Les deux œuvres ci-dessous de Tom Banchoff et ses collègues illustrent des sections de l'assemblage de ces deux tores projetées dans l'espace usuel.


Hopf Links


Pendulum Tori

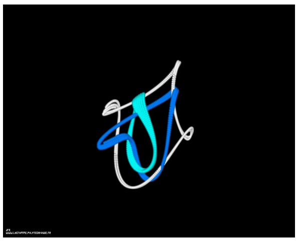
Il est remarquable que le second tableau illustre également les trajectoires possibles associées aux mouvements de pendules doubles. Ces trajectoires, périodiques, s'enroulent sur des tores enlacés. Chaque tore correspond à un type de pendule bien défini.

JEAN-FRANÇOIS COLONNA

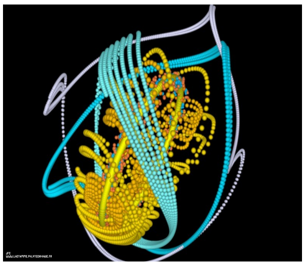
www.lactamme.polytechnique.fr

Les études de Poincaré sur le mouvement en général ont, pour une grande part, leur origine dans ses travaux sur la *Mécanique Céleste*. Cette Mécanique Céleste est ici représentée par trois oeuvres de Jean-François Colonna : elles montrent les trajectoires de quelques-unes de nos planètes habituelles que verrait un observateur placé, non point sur la terre, mais sur une planète virtuelle.

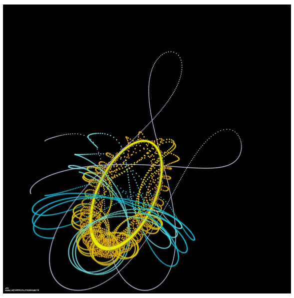
On peut se demander si, devant la complexité des trajectoires observées, il aurait été capable de fonder l'astronomie moderne !



Un sous-ensemble du système solaire (Uranus, Neptune, Pluton) avec une planète virtuelle supplémentaire -point de vue de la planète virtuelle



Le système solaire avec une planète virtuelle -point de vue de la planète virtuelle



Le système solaire avec une autre planète virtuelle -point de vue de la planète virtuelle

ANATOLY FOMENKO

http://dfgm.math.msu.su/files/fomenko/myth-vved.php

Cette oeuvre est assez riche pour pouvoir faire l'objet de diverses interprétations. La partie inférieure de l'image est originellement liée à l'idée *d'approximation simpliciale* en topologie et abordée par Poincaré. Elle est illustrée par la présence de blocs qui se fondent à l'horizon continu, et sur lesquels on voit deux hommes chaussés de skis : on pense bien sûr à ces blocs de glace qui viennent s'agglomérer autour des zones polaires. De grosses bulles de vapeur s'échappent de cet horizon illuminé par le soleil.

Ces suites de bulles ont la forme de sphères déformées, ce qui permet à l'auteur de voir également en elles une manière d'image des déformations de la métrique riemannienne le long d'un flot de Ricci, et d'associer ainsi cette oeuvre aux outils récemment développés pour résoudre une célèbre conjecture de Poincaré sur les sphères de l'espace à quatre dimensions.

Rêves et Conjectures

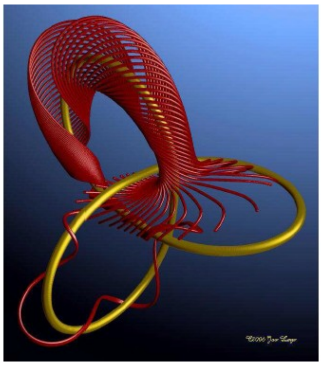
JOS LEYS

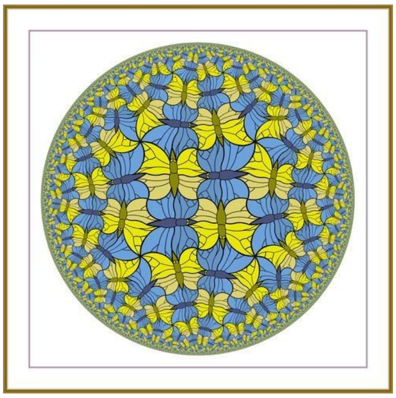
www.josleys.com

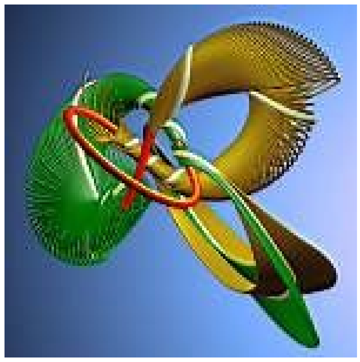
Poincaré a mis en évidence un type de mouvement important caractérisé par cette propriété locale : des trajectoires se rapprochent d'un point singulier jouant un rôle d'attracteur, alors que d'autres s'éloignent du même point jouant alors un rôle répulseur.

Ce point singulier peut éclater en une courbe fermée sur elle-même. Une telle courbe est appelée un noeud.

Real Matrix montre un tel noeud d'une belle teinte or vieilli. Il porte le nom de *noeud de trèfle*. Autour de ce noeud, vient ici s'enrouler un faisceau de trajectoires rouges.
Notices nous montre ce même noeud de trèfle, cette fois-ci d'une couleur rouge, autour duquel s'enroulent deux faisceaux de trajectoires, les unes fuyant la vision du trèfle, les autres très attirées par lui.


Real Matrix, 2006


Papillons, 2010


Notices, 2006

Papillons On considère un vase parfait de taille infinie, dont la section a la forme un peu en V d'une branche d'hyperbole. La surface extérieure de ce vase peut être entièrement recouverte de motifs décoratifs identiques, et qui ne s'interpénètrent pas, ce qu'on appelle un pavage de la surface.

Lorsqu'à travers un écran translucide on regarde ce vase du dessous, il apparaît sous la forme d'un disque. Ce disque est appelé *le disque hyperbolique de Beltrami-Poincaré*. Les motifs situés au plus bas du vase donnent sur l'écran une image peu déformée. Au fur et à mesure que le regard s'élève, les motifs s'éloignent de plus en plus de l'observateur, ils paraissent de plus en plus petits, ainsi que leurs images dans le disque.

Le pavage de la surface engendre ainsi un pavage du disque, qualifié lui aussi d'hyperbolique.

JOHN SULLIVAN

http://torus.math.uiuc.edu/jms/

Tout le monde a sans doute vu des dés réguliers creux en forme de dodécaèdre. Ses faces sont des pentagones. On peut dessiner sur la sphère ordinaire (de l'espace à trois dimensions) ces pentagones : ils forment un *pavage de la sphère*, c'est-à-dire un recouvrement de la sphère sans que deux pentagones sphériques ne s'interpénètrent.

Poincaré a montré qu'on pouvait faire quelque chose d'analogue sur *la sphère de l'espace à quatre dimensions*. L'équivalent du dodécaèdre régulier ordinaire est un hyper polyèdre de 120 côtés, dont chaque face est elle-même un dodécaèdre régulier habituel. Chaque sommet est commun à quatre dodécèdres, chaque arête est commune à trois dodécaèdres.

Le tableau de John Sullivan nous le montre en projection stéroégraphique, vu comme un assemblage de bulles de savon.

120 - cell